Matematica blu 2.0 vol.5 Esercizio: Sei pronto per la verifica? Prova B es. 2 pag. 1402

Studia la seguente funzione determinandone il dominio, il segno e gli zeri. Verificare se la funzione è pari o dispari:

$$y = \frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

Prima di iniziale lo studio del Dominio eseguiamo alcuni calcoli sulla funzione in modo da semplificarla:

$$\frac{1 - e^{-2x}}{2e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{2\,\frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}}{\frac{2}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}} \cdot \frac{e^x}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

DOMINIO:

Funzione esponenziale fratta, per il dominio bisogna escludere i valori che annullano il denominatore. Vediamo quando il denominatore è uguale a zero:

$$2e^x = 0$$

Il denominatore non si annulla mai ma risulta essere sempre positivo, quindi il dominio della funzione sarà qualunque ***x*** appartenente al campo dei numeri Reali, in simboli avremo:

Dom. f(x): $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

ZERI DELLA FUNZIONE:

per ***x = 0*** troviamo le intersezioni con l'asse ***y***:

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} = \frac{e^0 - 1}{2e^0} = \frac{1 - 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Quindi avremo l'intersezione con l'asse y nel punto ***P_1(0; 0)***

per ***y = 0*** troviamo le intersezioni con l'asse x:

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

Per trovare le intersezioni con l'asse ***x*** basterà trovare i **<u>valori che annullano il numeratore</u>**:

$$e^{2x} - 1 = 0 \;\rightarrow\; e^{2x} = 1 \;\rightarrow\; e^{2x} = e^0 \;\rightarrow 2x = 0\; per\; x = 0$$

Quindi avremo l'intersezione con l'asse x nel punto ***P₂(0; 0)*** che coincide con il punto ***P₁*** già trovato.

SEGNI DELLA FUNZIONE:

Dobbiamo verificare quando la funzione ***f(x) ≥ 0***

$$\frac{e^{2x}-1}{2e^{x}} \geq 0$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e quello del denominatore.

Per il numeratore avremo:

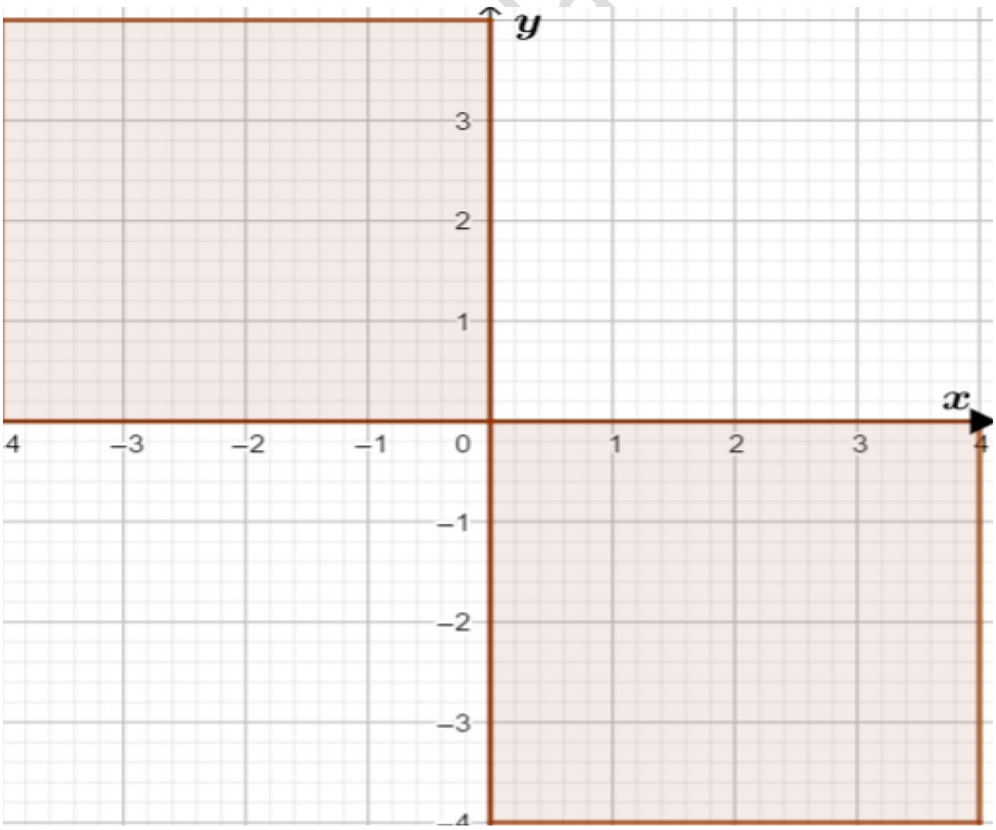
$$e^{2x}-1 \geq 0 \;\rightarrow\; e^{2x} \geq 1 \;\rightarrow\; e^{2x} \geq e^{0} \;\rightarrow 2x \geq 0 \; per \; x \geq 0$$

Per il denominatore avremo:

$$2e^{x} > 0 \;\; per \; \forall \, x \;\in\; \mathbb{R}$$

Grafico dei segni:

					0		
N	-	-	-	-		+	+
D	-	-	-	-		+	+
N/D	-	-	-	-		+	+



FUNZIONE PARI O DISPARI:

Una **funzione pari** è una funzione tale per cui ***f(-x) = f(x)***, e che quindi assume valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.

Una **funzione dispari** è una funzione tale per cui ***f(-x) = -f(x)*** e che quindi assume valori simmetrici rispetto all'origine.

All'inizio dell'esercizio avevamo svolto alcuni calcoli sulla funzione iniziale e avevamo ottenuto:

$$f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{2e^{x}}$$

Proviamo a vedere se la funzione è pari:

Consideriamo ora la 2^ funzione e sostituiamo ***x*** con ***-x*** ottenendo

$$f(-x) = \frac{e^{2(-x)}-1}{2e^{(-x)}} = \frac{e^{-2x}-1}{2e^{-x}} \neq f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}}$$

$$f(-x) \neq f(x)\ quindi\ la\ funzione\ \boldsymbol{NON}\ \text{è}\ \boldsymbol{PARI}$$

Proviamo a vedere se la funzione è dispari:

Consideriamo ora la 1^ funzione e troviamo ***-f(x)*** ottenendo:

$$-f(x) = -\frac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}} = \frac{e^{-2x}-1}{2e^{-x}} = f(-x)\ = \frac{e^{-2x}-1}{2e^{-x}}$$

$$-f(x) = f(-x)\ \ per\ cui\ la\ funzione\ \text{è}\ DISPARI$$