Matematica blu 2.0 vol.5 Esercizio 554 pag. 1542

Find the following limits. You must show all your work:

a) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}$

Sostituendo il valore a cui tende il limite nella funzione otteniamo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\frac{4^2-4-12}{4^2-3\cdot 4-4}=\frac{0}{0}$$

Abbiamo ottenuto la forma indeterminata ***0/0*** per cui a questo punto proviamo a scomporre numeratore e denominatore per cercare di semplificare la funzione. Per il numeratore occorre trovare due numeri la cui somma è ***-1*** e il prodotto ***-12*** che sono ***$x_1=3$*** e ***$x_2=-4$*** per cui possiamo scrivere il numeratore come ***(x+3)(x-4)***. Per il denominatore invece dobbiamo trovare due numeri la cui somma è ***-3*** e il prodotto è ***-4*** che sono ***$x_1=1$*** e ***$x_2=-4$*** per cui possiamo scrivere il numeratore come ***(x+1)(x-4)***. Per cui sostituendo e semplificando avremo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)\cancel{(x-4)}}{(x+1)\cancel{(x-4)}}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)}{(x+1)}$$

Sostituendo il valore a cui tende il limite avremo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)}{(x+1)}=\frac{4+3}{4+1}=\frac{7}{5}$$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}$

Sostituendo il valore a cui tende il limite nella funzione otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}=\frac{2\cdot 0}{\sin 3\cdot 0}=\frac{0}{\sin 0}=\frac{0}{0}$$

Abbiamo ottenuto la forma indeterminata ***0/0*** per cui a questo punto proviamo a scomporre ***sin(3x)*** che possiamo scomporre partendo dalla formula ***sin(3x)=sin(2x+x)*** da cui eseguendo tutti i passaggi otteniamo:

$\sin 3x = 3\,sin\,x\ -\ 4\sin^3 x$ per cui il nostro limite diventa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3\,sin\;x\;-\;4\sin^3 x}$$

Al denominatore mettiamo ***3· sin(x)*** in evidenza ottenendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3\,sin\;x\;-\;4\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3\,sin\;x\left(1\;-\frac{4}{3}\sin^2 x\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{sin\;x\left(1\;-\frac{4}{3}\sin^2 x\right)}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin\;x\left(1\;-\frac{4}{3}\sin^2 x\right)}$$

Il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti per cui possiamo scrivere:

$$\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin\;x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1\;-\frac{4}{3}\sin^2 x\right)}$$

Ora possiamo scrivere la funzione del 1° limite $\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{\frac{sin\,x}{x}}$ ottenendo:

$$\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sin\;x}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1\;-\frac{4}{3}\sin^2 x\right)}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{sin\;x}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1\;-\frac{4}{3}\sin^2 x\right)}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\left(1\;-\frac{4}{3}\sin^2 0\right)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$$

c) $\lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2-2x+3}$

Mettiamo in evidenza $\boldsymbol{x^2}$ sotto radice:

$$\lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$$

Per ***x→+∞*** i termini ***2/x*** e $\boldsymbol{3/x^2}$ tendono a zero per cui avremo:

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2(1-0+0)}=\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2}=+\infty-\infty$$

Abbiamo ottenuto una forma indeterminata ***+∞ – ∞*** proviamo a razionalizzare:

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-2x+3}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-2x+3}}{x+\sqrt{x^2-2x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-2x+3}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-2x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+2x-3}{x+\sqrt{x^2-2x+3}}$$

Ora mettiamo x in evidenza al numeratore e denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(2-\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}\right)}$$

Per $x\to+\infty$ il termine ***3/x*** al numeratore tende a ***0*** per cui avremo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}\right)}=\frac{2}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}\right)}$$

A questo punto possiamo scrivere la ***x*** al denominatore come $\sqrt{x^2}$ per cui sostituendo avremo:

$$\frac{2}{1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{\sqrt{x^2}}}=\frac{2}{1+\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2}}}$$

Sapendo che il limite di una radice è uguale alla radice del limite possiamo scrivere:

$$\frac{2}{1+\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2}}}=\frac{2}{1+\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}}}}$$

Per $x\to+\infty$ i termini ***2/x*** e ***3/x²*** al numeratore tendono a ***0*** per cui avremo:

$$\frac{2}{1+\sqrt{(1-0+0)}}=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=\boxed{1}$$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$

Sostituendo il valore a cui tende il limite nella funzione avremo:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{(1)^2-1}{(1-1)^2}=\frac{0}{0}$$

Abbiamo ottenuto la forma indeterminata ***0/0***; proviamo a scomporre e semplificare:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}$$

Sostituendo il valore a cui tende il limite nella funzione avremo:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+1^{\;2}}{1^- -1}=\frac{2}{0^-}=\boxed{-\infty}$$