Esercizio n. 43 pag. 213

Una biglia di massa 120 g si muove su un piano orizzontale senza attrito con velocità di 3,8 m/s lungo il verso positivo dell'asse . A un certo istante, la biglia urta contro due biglie ferme una accanto all'altra, di masse rispettivamente 190 g e 80,0 g e si ferma.Dopo l'urto la più pesante delle due biglie si muove con velocità di 2,4 m/s in una direzione che forma un angolo di 30° con il verso positivo dell'asse x. Determina:

a. l'angolo formato con la direzione positiva dell'asse x dal vettore velocità della terza biglia dopo l'urto;
b. il vettore velocità della terza biglia dopo l'urto e il suo modulo.

Svolgimento:

Dati del problema:

biglia 1	$m_1=120$ g $v_1=3{,}8$ m/s	**biglia 2**	$m_2=190$ g $v_2=2{,}4$ m/s $\alpha_2=30°$	**biglia 3**	$m_3=80$ g $v_3=??$ $\alpha_3=??$

a. Dal principio di conservazione della quantità di moto, dopo l'urto lungo l'asse x avremo che:

$$P_{x1} = P_{x2} + P_{x2}$$

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \cdot cos(\alpha_2) + m_3 \cdot v_3 \cdot cos(\alpha_3)$$

mentre lungo l'asse y avremo:

$P_{y1} = P_{y2} + P_{y2}$ la componente della biglia 1 lungo l'asse y è nulla

$$0 = m_2 \cdot v_2 \cdot sin(\alpha_2) + m_3 \cdot v_3 \cdot cos(\alpha_3)$$

Mettiamo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \cdot cos(\alpha_2) + m_3 \cdot v_3 \cdot cos(\alpha_3) \\ 0 = m_2 \cdot v_2 \cdot sin(\alpha_2) + m_3 \cdot v_3 \cdot sin(\alpha_3) \end{cases}$$

Calcolo v3 dalla seconda equazione:

$$v_3 = -\frac{m_2 \cdot v_2 \cdot sin(\alpha_2)}{m_3 \cdot sin(\alpha_3)}$$

Sostituisco m3 nella prima equazione del sistema:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \cdot sin(\alpha_2) + m_3 \cdot \left(-\frac{m_2 \cdot v_2 \cdot sin(\alpha_2)}{m_3 \cdot sin(\alpha_3)}\right) \cdot cos(\alpha_3)$$

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \cdot sin(\alpha_2) + m_3 \cdot \left(-\frac{m_2 \cdot v_2 \cdot sin(\alpha_2)}{m_3}\right) \cdot \frac{cos(\alpha_3)}{sin(\alpha_3)}$$

In trigonometria sappiamo che:

$$\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = tan(\alpha)$$

Per cui :

$$\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Sostituendo avremo:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\alpha_2) + m_3 \cdot \left(-\frac{m_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\alpha_2)}{m_3}\right) \cdot \frac{1}{\tan(\alpha_3)}$$

Dalla formula precedente calcoliamo ***tan(α3)***:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\alpha_2) - \frac{m_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\alpha_2)}{\tan(\alpha_3)}$$

$$\frac{m_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\alpha_2)}{\tan(\alpha_3)} = m_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\alpha_2) - m_1 \cdot v_1$$

$$\tan(\alpha_3) = \frac{m_2 \cdot v_2 \cdot \sin(\alpha_2)}{m_2 \cdot v_2 \cdot \cos(\alpha_2) - m_1 \cdot v_1}$$

Sostituiamo i dati in nostro possesso e calcoliamo il valore di ***tan(α3)***:

$$\tan(\alpha_3) = \frac{(0,19\ kg) \cdot \left(2,4\frac{m}{s}\right) \cdot \sin(30°)}{(0,19\ kg) \cdot \left(2,4\frac{m}{s}\right) \cdot \cos(30°) - (0,120\ kg) \cdot \left(3,8\frac{m}{s}\right)} = -3,7$$

Calcoliamo α_3 :

$$\alpha_3 = \arctan(-3,7) = -75°$$

Sostituiamo l’angolo appena trovato di -75° nella formula di $\boldsymbol{v_3}$:

$$v_3 = -\frac{(0,19\ kg) \cdot \left(2,4\frac{m}{s}\right) \cdot \sin(30°)}{0,08\ kg \cdot \sin(-75°)}$$

$$v_3 = 3,0\frac{m}{s}$$

Calcoliamo ora il vettore di v3:

$$\overrightarrow{v_3} = (v_3 \cdot \cos a_3)\hat{x} + (v_3 \cdot \sin a_3)\hat{y}$$

$$\overrightarrow{v_3} = \left(3,0\frac{m}{s} \cdot \cos(-75°)\right)\hat{x} + \left(3,0\frac{m}{s} \cdot \sin(-75°)\right)\hat{y}$$

$$\overrightarrow{v_3} = \left(0,78\frac{m}{s}\right)\hat{x} - \left(2,9\frac{m}{s}\right)\hat{y}$$