Esercizio n. 514 pag. 337

Studia il fascio di parabole di equazione $y = kx^2 + 2x - k + 1$ e trova la parabola γ_1 che ha il vertice di ordinata ***3*** e la parabola γ_2 tangente alla retta di equazione $y = 2x - 2$.
Nella parte di piano racchiuso da γ_1 e γ_2 determina l'equazione di una retta parallela all'asse y che interseca una corda ***PQ*** di lunghezza 3.
Tracciare le tangenti alle due parabole nei punti ***P*** e ***Q*** (con ***P*** nel secondo quadrante) che si intersecano nel punto ***T***, trova l'area del triangolo ***PQT***.

Svolgimento:

Dall'equazione della parabola calcoliamo la coordinata del vertice V_y in funzione di ***k*** e la imponiamo uguale a ***3***:

$$y = kx^2 - 2\mathrm{x} - \mathrm{k} + 1$$

$$V_y = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$V_y = \frac{4k(-k+1) - 4}{4k} = \frac{\cancel{4k}(-k+1)}{\cancel{4k}} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}k}$$

$$V_y = -k + 1 - \frac{1}{k}$$

Imponiamo la coordinata ***Vy = 3***

$$-k + 1 - \frac{1}{k} = 3$$

$$-k - \frac{1}{k} - 2 = 0$$

Moltiplico ambo i membri per ***–k*** (in questo modo elimino il denominatore e cambio di segno all'equazione):

$$k^2 + 2k + 1 = 0 \qquad (*)$$

Calcolo il Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$

Come possiamo notare l'equazione (*) è il quadrato di un binomio e quindi possiamo scriverla come:

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = (k+1)(k+1)$$

Che si annulla per $(k + 1)$ cioè per $k = -1$

Sostituiamo il valore di ***k*** appena trovato nell'equazione iniziale $y = kx^2 + 2x - \mathrm{k} + 1$ ottenendo:

$$y = -1x^2 + 2x + 1 + 1$$

$$y = -x^2 + 2x + 2 \qquad (1)$$

Calcoliamo ora l'equazione del fascio tangente alla retta ***y=2x-2*** mettendo a sistema il fascio di parabole iniziale e la retta stessa:

$$\begin{cases} y = kx^2 + 2x - k + 1 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

Metodo del confronto, essendo uguali i primi membri ***y=y*** lo saranno anche i secondi membri:

$$kx^2 + 2x - \mathrm{k} + 1 = 2\mathrm{x} - 2$$

$$kx^2 - k + 3 = 0$$

Calcolo il Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4k(-k + 3) = 4k^2 - 12k$$

Imponiamo il ***Δ = 0*** e vediamo per quali valori si annulla:

$$4k^2 - 12k = 0$$

$$4k(k - 3) = 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto avremo:

$k = 0$ non è accettabile in quanto si annullerebbe il coefficiente della ***x²*** e quindi non si avrebbe più una parabola;

$k - 3 = 0 \rightarrow k = 3$

Sostituiamo il valore di ***k*** appena trovato nell'equazione iniziale $y = kx^2 + 2x - k + 1$ ottenendo:

$$y = 3x^2 + 2x - 3 + 1$$

$$y = 3x^2 + 2x - 2 \qquad (2)$$

Mettiamo ora a sistema le equazioni **(1)** e **(2)** e troviamo i punti di intersezione:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 2 \\ y = 3x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$

Metodo del confronto, essendo uguali i primi membri $y = y$ lo saranno anche i secondi membri:

$$-x^2 + 2x + 2 = 3x^2 + 2x - 2$$

$$3x^2 + x^2 - 2 - 2 = 0$$

$$4x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Sostituiamo nella 1^ equazione del sistema $y = -x^2 + 2x + 2$:

Per $x = -1$ avremo:

$y = -1 - 2 + 2 \quad \rightarrow \quad y = -1$

Per $x = 1$ avremo:

$y = -1 + 2 + 2 \quad \rightarrow \quad y = 3$

Quindi le due parabole sono secanti nei punti:

$A(-1;\ -1)$

$B(1;\ 3)$

Consideriamo ora la retta parallela all'asse ***y*** di equazione generica $x = j$ e mettiamola a sistema con l'equazione della prima parabola:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 2 \\ x = j \end{cases}$$

Sostituiamo la ***x*** della seconda equazione della parabola ottenendo:

$y = -j^2 + 2j + 2$

Quindi il punto ***Q*** avrà per coordinate:

$Q\ (j;\ -j^2 + 2j + 2)$

Consideriamo ora la stessa retta parallela all'asse ***y*** di equazione generica $x = j$ e mettiamola a sistema con l'equazione della seconda parabola:

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 2x - 2 \\ x = j \end{cases}$$

Sostituiamo la ***x*** della seconda equazione della parabola ottenendo:

$y = 3j^2 + 2j - 2$

Quindi il punto ***P*** avrà per coordinate:

$P\ (j;\ 3j^2 + 2j - 2)$

Come possiamo notare i punti ***P*** e ***Q*** hanno stessa ascissa $(x = j)$ e pertanto la distanza ***PQ*** è data dal valore assoluto della differenza tra le due ordinate:

$\overline{PQ} = |-j^2 + 2j + 2| - |3j^2 + 2j - 2|$

$\overline{PQ} = -j^2 + 2j + 2 - 3j^2 - 2j + 2$

$\overline{PQ} = -j^2 + 2j + 2 - 3j^2 - 2j + 2$

$\overline{PQ} = -j^2 + 2 - 3j^2 + 2$

$\overline{PQ} = -4j^2 + 4$

Imponiamo che la lunghezza di ***PQ = 3*** ottenendo:

$-4j^2 + 4 = 3$

$-4j^2 = -4 + 3$

$-4j^2 = -1$ moltiplico tutto per ***-1*** cambiando di segno:

$4j^2 = 1$

$$j = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow j = \pm\frac{1}{2}$$

Le equazioni delle rette parallele all'asse ***y*** che intersecano una corda ***PQ*** di lunghezza 3 sono:

$$x = -\frac{1}{2} \text{ v } x = \frac{1}{2}$$

Dal testo dell'esercizio, dovendo essere il punto ***P*** nel II quadrante significa che la retta da considerare è $x = \frac{1}{2}$. Sostituiamolo nel sistema precedente dove abbiamo trovato il punto ***P*** il valore $j = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 2x - 2 \\ x = j \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3x^2 + 2x - 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2} - 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4} + 1 - 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4} - 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\begin{cases} y = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ per cui abbiamo $P\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

Ora sostituiamo nel sistema precedente dove abbiamo trovato il punto ***Q*** il valore $j = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 2 \\ x = j \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x^2 + 2x + 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2} + 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{4} + 1 + 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{4} + 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\begin{cases} y = \frac{11}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ per cui abbiamo $Q\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right)$

Ora scriviamo l'equazione della retta tangente alla parabola $y = -x^2 + 2x + 2$ nel punto $Q\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right)$ utilizzando la formula dello sdoppiamento:

$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$ dove : $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{11}{4} \end{cases}$

$$y - \frac{11}{4} = \left(2(-1)\frac{1}{2} + 2\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y - \frac{11}{4} = (-1 + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y - \frac{11}{4} = x - \frac{1}{2}$$

$$y = x - \frac{1}{2} + \frac{11}{4}$$

$$y = x + \frac{-2 + 11}{4}$$

$$y = x + \frac{9}{4}$$

Ora invece scriviamo l'equazione della retta tangente alla parabola $y = 3x^2 + 2x - 2$ nel punto $P\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ utilizzando la formula dello sdoppiamento:

$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$ dove : $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$$y + \frac{1}{4} = \left(2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 2\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y + \frac{1}{4} = (3 + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$y+\frac{1}{4}=5x-\frac{5}{2}$$

$$y=5x-\frac{5}{2}-\frac{1}{4}$$

$$y=5x+\frac{-10-1}{4}$$

$$y=5x-\frac{11}{4}$$

Troviamo ora il punto di intersezione ***T*** delle due rette appena trovate:

$$\begin{cases} y=x+\dfrac{9}{4} \\ y=5x-\dfrac{11}{4} \end{cases}$$

$$x+\frac{9}{4}=5x-\frac{11}{4}$$

$$5x-x=\frac{9}{4}+\frac{11}{4}$$

$$4x=\frac{20}{4} \quad \rightarrow \quad x=\frac{20}{16} \quad \rightarrow \quad x=\frac{5}{4}$$

Sostituendo la ***x*** nell'equazione della 1^ retta avremo la coordinata ***y*** :

$$y=\frac{5}{4}+\frac{9}{4}=\frac{14}{4} \quad \rightarrow \quad y=\frac{7}{2}$$

Quindi il punto ***T*** intersezione delle due rette tangenti ha per coordinate:

$$T\left(\frac{5}{4};\frac{7}{2}\right)$$

A questo punto osservando il grafico possiamo dedurre che il punto ***C*** ha la stessa ascissa del punto ***P*** e la stessa ordinata del punto ***T***:

$$C\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$$

Il punto ***E*** invece ha la stessa ascissa del punto ***T*** e la stessa ordinata del punto ***P*** :

$$E\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{4}\right)$$

Ora disegniamo il grafico:

Dal grafico possiamo verificare che l'area del triangolo ***PQT*** può essere calcolata come area del rettangolo ***CTEP*** a cui sottraiamo l'area dei due triangoli ***CQT*** ed ***EPT***.

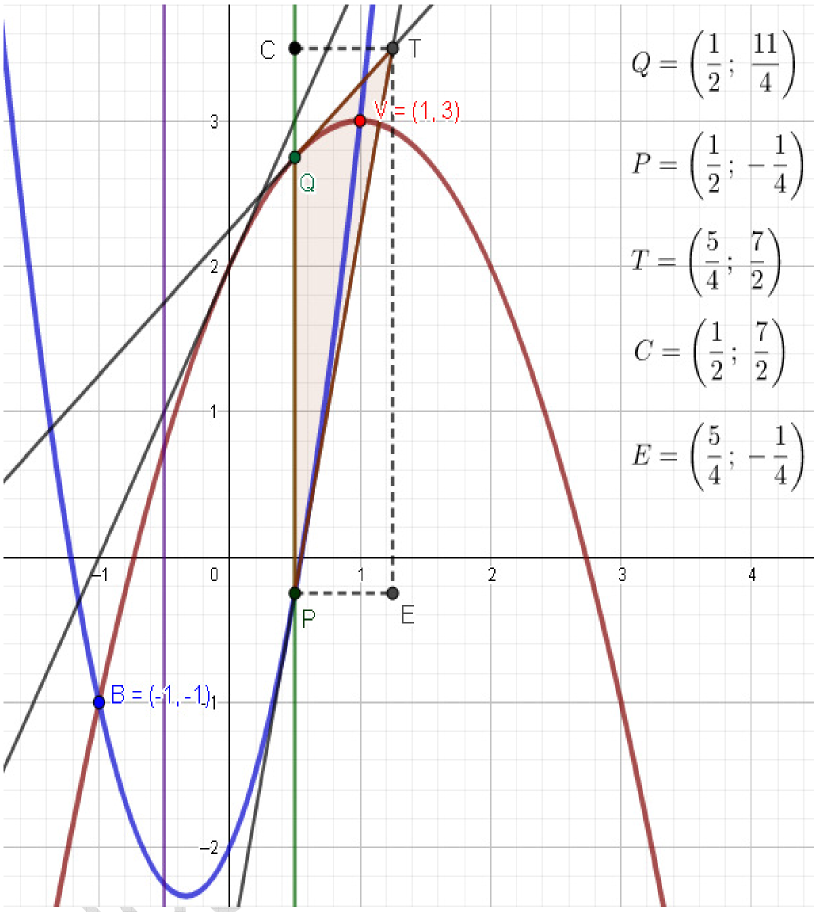
L'area di ***CTEP*** è data dal prodotto di ***PE•TE***; i punti ***P*** ed ***E*** hanno la stessa ordinata quindi la lunghezza ***PE*** è data da:

$$\overline{PE} = \left|\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{5-2}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

i punti ***T*** ed ***E*** hanno invece la stessa ascissa quindi la lunghezza ***TE*** è data da:

$$\overline{TE} = \left|\frac{7}{2} + \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{14+1}{4}\right| = \frac{15}{4}$$

I cateti del triangolo ***EPT*** sono ***PE*** e ***TE*** che abbiamo appena trovato; quelli del triangolo ***CQT*** sono ***CT=PE*** già trovato, mentre ***CQ*** lo possiamo calcolare:



$$\overline{CQ} = \left|\frac{7}{2} - \frac{11}{4}\right| = \left|\frac{14-11}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

Calcoliamo l'area del rettangolo ***CTEP*** e quella dei due triangoli ***EPT*** e ***CQT***:

$$Area_{CTEP} = \overline{PE} \cdot \overline{TE} = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{16}$$

$$Area_{EPT} = \overline{PE} \cdot \overline{TE} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{45}{32}$$

$$Area_{CQT} = \overline{CT} \cdot \overline{CQ} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$$

Ora possiamo calcolare l'area del nostro triangolo PQT:

$$Area_{PQT} = Area_{CTEP} - Area_{EPT} - Area_{CQT}$$

$$Area_{PQT} = \frac{45}{16} - \frac{45}{32} - \frac{9}{32} = \frac{90-45-9}{32} = \frac{36}{32} \rightarrow Area_{PQT} = \frac{9}{8}$$