Esercizio n. 513 pag. 337

Studia il fascio di parabole di equazione $y = 2x^2 - (4k - 8)x + 1$ e determina par quali valori di ***k*** si ha una parabola che ha:

(a) il vertice di ordinata ***< –1***;
(b) l'asse di simmetria di equazione ***x = –4***;
(c) il vertice sulla bisettrice del primo e terzo quadrante:
(d) il fuoco di ordinata nulla.

Svolgimento:

a. il vertice di ordinata < –1:

Considero l'equazione del fascio e calcolo l'ordinata del vertice in funzione di ***k*** e la impongo ***< –1***:

$$y = 2x^2 - (4k - 8)x + 1$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4k - 8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\Delta = 16k^2 - 64k + 64 - 8$$

$$\Delta = 16k^2 - 64k + 56$$

$$V_y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(16k^2 - 64k + 56)}{8}$$

Cambio segno al numeratore e metto ***8*** in evidenza ottenendo:

$$V_y = \frac{8 \cdot (-2k^2 + 8k - 7)}{8}$$

$$V_y = -2k^2 + 8k - 7$$

Imponiamo ora l'ordinata del vertice appena trovata < –1:

$$-2k^2 + 8k - 7 < -1$$

$$-2k^2 + 8k - 6 < 0$$

Divido ambo i membri per ***2*** e poi moltiplico tutto per ***-1*** cambiando di segno e verso della disequazione:

$$k^2 - 4k + 3 > 0$$

Scomponendo con Somma e Prodotto, cioè trovando due numeri la cui somma = ***– 4*** e il prodotto = ***3*** avremo:

$$(k - 1) \cdot (k - 3) > 0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto avremo che l'equazione associata si annulla per:

$$k - 1 = 0 \ \rightarrow \ k = 1$$

$$k - 3 = 0 \ \rightarrow \ k = 3$$

Quindi la nostra disequazione, essendo ***a>0***, ***Δ>0***, segno della disequazione ***> 0***, è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici e cioè:

$k < 1 \vee k > 3$

b. l'asse di simmetria di equazione x = –4:

Partiamo sempre dall'equazione del fascio di parabole:

$y = 2x^2 - (4k - 8)x + 1$

La formula dell'asse di simmetria è:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4k-8}{4} = \frac{4\cdot(k-2)}{4} \rightarrow x = k - 2$$

Poniamo la ***x = – 4***:

$k - 2 = -4$

$k - 2$

c. il vertice sulla bisettrice del I e III quadrante:

Partiamo sempre dall'equazione del fascio di parabole:

$y = 2x^2 - (4k - 8)x + 1$

Calcoliamo le coordinate del vertice in funzione di k:

$$V_x = -\frac{b}{2a} = \frac{4k-8}{4} = \frac{4\cdot(k-2)}{4} = k - 2$$

L'ordinata l'avevamo già calcolata nel punto ***a.***:

$$V_y = -\frac{\Delta}{4a} = -2k^2 + 8k - 7$$

Ora dobbiamo porre

$V_x = V_y$

$k - 2 = -2k^2 + 8k - 7$

$k - 2 + 2k^2 - 8k + 7$

$2k^2 - 7k + 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9$

$$k_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} \rightarrow k_1 = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1;\ k_2 = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

d. il fuoco di ordinata nulla:

Partiamo sempre dall'equazione del fascio di parabole:

$y = 2x^2 - (4k - 8)x + 1$

Calcoliamo l'ordinata del fuoco:

$$F_y = \frac{1 - \Delta}{4a}$$

Il Delta lo avevamo già calcolato nell'esercizio a., quindi sostituendo avremo:

$$F_y = \frac{1 - \Delta}{4a} = \frac{1 - (16k^2 - 64k + 56)}{8} = \frac{1 - 16k^2 + 64k - 56}{8}$$

Dobbiamo porre l'ordinata del fuoco = 0 per cui avremo:

$$\frac{-16k^2 + 64k - 55}{8} = 0$$

Moltiplico ambo i membri per -8, in questo modo elimino il denominatore e cambio di segno all'equazione:

$$-8 \cdot \frac{-16k^2 + 64k - 55}{8} = 0$$

$$16k^2 - 64k + 55 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64^2 - 4 \cdot 16 \cdot 55 = 576$$

$$k_{1/2} = \frac{64 \pm \sqrt{576}}{32} \rightarrow k_1 = \frac{64 - 24}{32} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}; \quad k_2 = \frac{64 + 24}{32} = \frac{88}{32} = \frac{11}{4}$$