Esercizio n. 507 pag. 337

Considera la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 5$ e il suo punto ***P*** di ascissa ***4***.

a. Scrivi le equazioni delle tangenti ***t***, passante per il vertice, e della tangente ***s***, passante per ***P***, e determina il punto ***R*** di intersezione tra ***s*** e ***t***.

b. Dette ***H*** e ***K*** le proiezioni di ***P***, rispettivamente sull'asse della parabola e sulla retta ***t***, calcola l'***area*** del quadrilatero ***HPKR***.

Svolgimento:

Considero l'equazione della parabola:

$$y = x^2 - 4\mathrm{x} + 5$$

Sostituisco l'ascissa ***4*** del punto ***P*** nell'equazione e troviamo l'ordinata:

$$y = 16 - 16 + 5 = 5$$

$$P(4; 5)$$

Calcoliamo ora le coordinate del vertice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$V\left(-\frac{-4}{2\cdot 1}; -\frac{16-20}{4\cdot 1}\right)$$

$$V(2;\ 1)$$

Calcoliamo ora la tangente alla parabola nel vertice ***V*** utilizzando la formula seguente:

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$$

Dove: $\begin{cases} a = 1; b = -4; c = 5 \\ x_0 = 2;\ \ y_0 = 1 \end{cases}$

$$y - 1 = (2\cdot 1\cdot 2 - 4)(x - 2)$$

$$y - 1 = (4 - 4)(x - 2)$$

$y - 1 = 0 \ \rightarrow\ y = 1$ Equazione della retta tangente ***t***

Calcolo ora la tangente al punto ***P***

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0)$$

Dove: $\begin{cases} a = 1; b = -4; c = 5 \\ x_0 = 4;\ \ y_0 = 5 \end{cases}$

$$y - 5 = (2\cdot 1\cdot 4 - 4)(x - 4)$$

$$y - 5 = (8 - 4)(x - 4)$$

$y - 5 = 4x - 16$

$y = 4x - 16 + 5$

$y = 4x - 11$ Equazione della retta tangente ***s***

Mettiamo a sistema le due rette ***t*** ed ***s*** e calcoliamo le coordinate del loro punto di intersezione:

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 4x - 11 \end{cases}$$

Metodo del confronto:

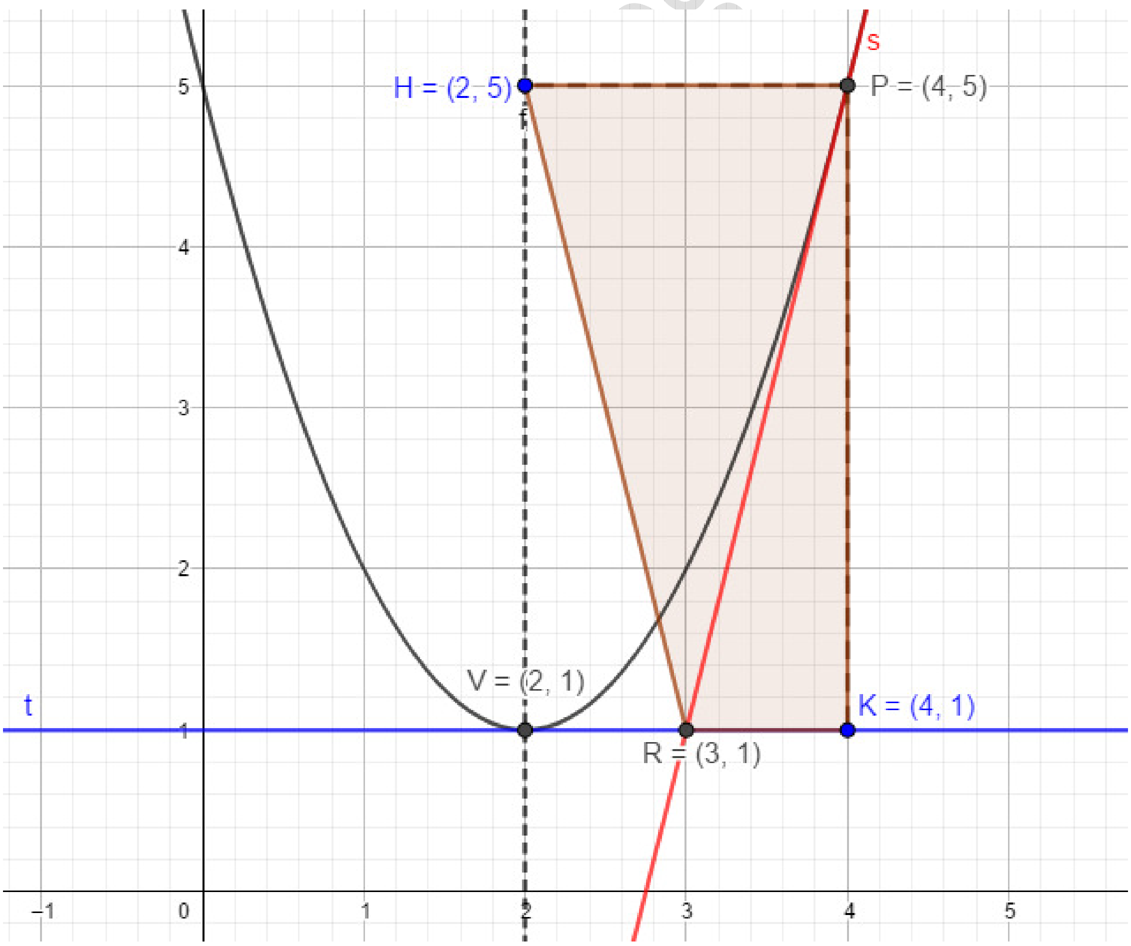
$$4x - 11 = 1 \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{4} \rightarrow x = 3$$

Sostituisco ***x=3*** nella 2^ equazione e trovo l'ordinata del punto di intersezione ***R***:

$$y = 4 \cdot 3 - 11 \rightarrow y = 12 - 11 \rightarrow y = 1$$

$R(3; 1)$

Grafico:



Dal grafico si evince che il quadrilatero è un trapezio rettangolo di cui:

B = 2 (base maggiore = KP)

b = 1 (base minore = RH)

h = 4 (altezza = PK)

Calcoliamo l'area del trapezio:

$$Area = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(2+1)\cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$