Esercizio n. 506 pag. 336

(a) Date le parabole di equazione $y = x^2 - 4x + 4$ e $y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4$, determina le equazioni delle rette ***t*** ed ***s*** tangenti nel punto delle parabole di ascissa ***x=0***.

(b) Determina ***k*** in modo che la retta ***y=k*** formi con ***t*** ed ***s*** un triangolo di area ***32***.

Svolgimento:

Sostituisco la coordinata ***x=0*** nella prima equazione della parabola e calcolo la ***y*** del punto ***P***:

$y = x^2 - 4x + 4$

$y = 0 - 0 + 4$

$P(0; 4)$

Scriviamo ora l'equazione della retta ***t*** tangente alla prima parabola e passante per il punto ***P*** usando la seguente formula:

$$\frac{y + y_0}{2} = ax_0x + \mathrm{b}\frac{x - x_0}{2} + c$$

$$Dove: \begin{cases} a = 1; b = -4; c = 4 \\ x_0 = 0; \;\; y_0 = 4 \end{cases}$$

$$\frac{y + 4}{2} = 1 \cdot 0 \cdot x - 4\frac{x - 0}{2} + 4$$

$$\frac{y + 4}{2} = -2x + 4$$

$$y + 4 = -4x + 8$$

$$y = -4x + 4$$ retta ***t***

Scriviamo ora l'equazione della retta ***s*** tangente alla seconda parabola e passante per il punto ***P*** usando la seguente formula:

$$y - y_0 = (2ax_0 + b)(x - x_0\ )$$

Dove: $\begin{cases} a = \frac{1}{9}; b = \frac{4}{3}; c = 4 \\ x_{0=} = 0; \;\; y_0 = 4 \end{cases}$

$$y - 4 = \left(2 \cdot \frac{1}{9} \cdot 0 + \frac{4}{3}\right) \cdot (x - 0)$$

$$y - 4 = \frac{4}{3}x$$

$$y = \frac{4}{3}x + 4$$ retta ***s***

Consideriamo ora la retta ***y=k*** e calcoliamo il punto di intersezione con la retta ***t*** mettendo a sistema le due rette:

$$\begin{cases} y = k \\ y = -4x + 4 \end{cases}$$

$$k = -4x + 4$$

$$4x = 4 - \mathrm{k}$$

$$x = \frac{4 - \mathrm{k}}{4}$$

$$x = 1 - \frac{\mathrm{k}}{4}$$

Sostituisco la ***x*** nell'equazione della retta ***t*** e trovo la ***y***:

$$y = -4\left(1 - \frac{\mathrm{k}}{4}\right) + 4$$

$$y = -4 + k + 4$$

$$y = k$$

Quindi il nostro punto di intersezione avrà per coordinate:

$$A\left(1 - \frac{\mathrm{k}}{4}; k\right)$$

Allo stesso modo calcoliamo il punto di intersezione tra la retta ***y=k*** e la retta ***s*** mettendo a sistema le due rette:

$$\begin{cases} y = k \\ y = \frac{4}{3}x + 4 \end{cases}$$

$$k = \frac{4}{3}x + 4$$

$$\frac{4}{3}x = k - 4$$

$$x = \frac{3}{4} \cdot (k - 4)$$

$$x = \frac{3}{4}k - 3$$

Sostituisco la ***x*** nell'equazione della retta ***s*** e trovo la ***y***:

$$y = -\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}k - 3\right) + 4$$

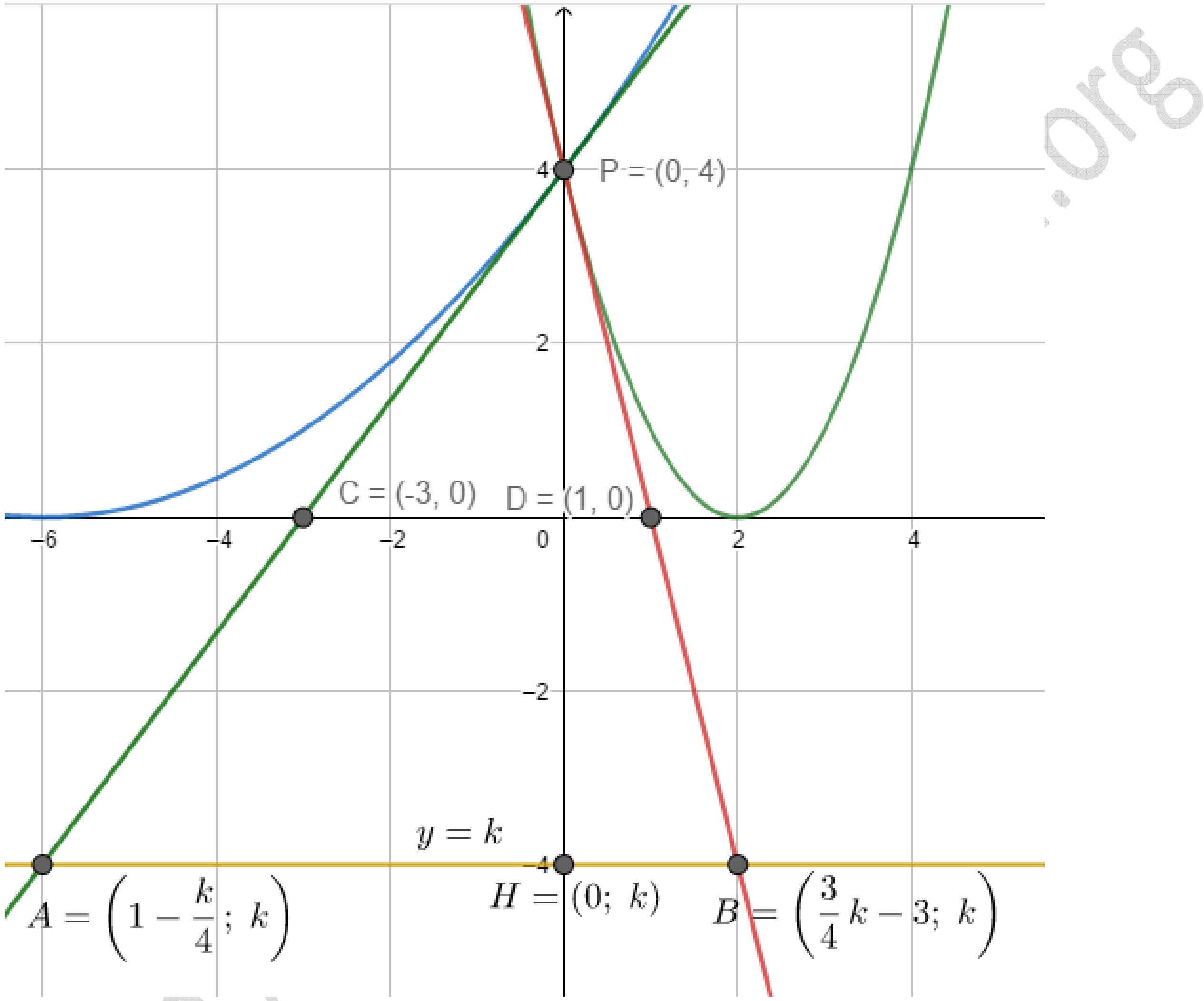
$$y = k - 4 + 4$$

$y = k$

Quindi il nostro punto di intersezione avrà per coordinate:

$B\left(\frac{3}{4}k - 3; k\right)$

Disegniamo ora il grafico delle rette ***t***, ***s*** e ***y=k***



Calcoliamo ora la lunghezza del segmento ***AB*** in funzione di ***k*** che rappresenta la base del nostro triangolo:

$$\overline{AB} = \left|1 - \frac{k}{4} - \left(\frac{3}{4}k - 3\right)\right| = \left|1 - \frac{k}{4} - \frac{3}{4}k + 3\right| = \left|-\frac{4}{4}k + 4\right| = |4 - k|$$

Calcoliamo ora la lunghezza del segmento ***HP*** in funzione di ***k*** che rappresenta l'altezza del nostro triangolo:

$$\overline{HP} = |k - 4|$$

Ora calcoliamo l'area del triangolo ***ABP*** e imponiamola uguale a ***32***:

$$Area_{ABP} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{HP}}{2} = \frac{|4-k| \cdot |k-4|}{2} = \frac{|4k-16-k^2+4k|}{2}$$
$$= \frac{|-k^2+8k-16|}{2}$$

Imponiamo l'area trovata uguale a 32

$$\frac{|-k^2+8k-16|}{2} = 32 \ \rightarrow \ |-k^2+8k-16| = 64$$

Se il valore assoluto è ***> 0*** avremo:

$$-k^2+8k-16=64$$

$$-k^2+8k-16-64=0$$

$$-k^2+8k-80=0$$

In questo caso il $\Delta < \mathbf{0}$ per cui non ci sono soluzioni nel campo dei numeri reali.

Se il valore assoluto è ***< 0*** avremo:

$$k^2-8k+16=64$$

$$k^2-8k+16-64=0$$

$$k^2-8k-48=0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 64+192 = 256$$

$$k_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{8 \pm 16}{2}$$

$$k_1 = \frac{8-16}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$k_2 = \frac{8+16}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$k = -4 \ \text{ v } \ \mathrm{k} = 12$$