Esercizio n. 505 pag. 336

Determinare ***b*** e ***c*** in modo che le parabole di equazione $y = x^2 + \mathrm{b}x$ e $y = -x^2 - 2x + \mathrm{c}$ intersechino la retta di equazione $y = -5$ nel punto di ascissa ***1***. Verifica che le due parabole sono tangenti, determina l'equazione della tangente comune ***t*** e calcola l'area del triangolo formato da ***t***, ***r*** e l'asse ***y***.

Svolgimento:

Consideriamo la parabola $y = x^2 + \mathrm{b}x$ e consideriamo l'intersezione con la retta $y = -5$ per cui metto a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 + \mathrm{b}x \\ y = -5 \end{cases}$$

$$x^2 + \mathrm{b}x = -5$$

Considerando che l'intersezione avviene nel punto ***x=1***, sostituisco nell'equazione e calcolo ***b***:

$$1 + \mathrm{b} = -5 \rightarrow \ b = -6$$

Facciamo la stessa cosa con l'equazione della seconda parabola:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2\mathrm{x} + \mathrm{c} \\ y = -5 \end{cases}$$

$$-x^2 - 2x + \mathrm{c} = -5$$

Considerando che l'intersezione avviene nel punto ***x = 1***, sostituisco nell'equazione e calcolo ***c***:

$$-1 - 2 + \mathrm{c} = -5$$

$$\mathrm{c} = -5 + 1 + 2$$

$$\mathrm{c} = -2$$

Sostituisco la ***b*** e la ***c*** appena trovate nelle equazioni delle due parabole, le metto a sistema per verificare se sono tangenti:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = -x^2 - 2x - 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 6x = -x^2 - 2x - 2$$

$$x^2 + x^2 - 6x + 2x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$$

Essendo il ***Delta=0*** le due parabole sono tangenti; calcoliamo ora la coordinata ***x*** del punto di tangenza risolvendo l'equazione:

$$x_{1/2} = \frac{4 \pm 0}{4} = 1$$

Sostituisco la ***x*** appena trovata nell'equazione della prima parabola calcolando la ***y***:

$y = x^2 - 6x$

$y = 1 - 6 = -5$

Quindi il punto ***P*** di intersezione delle due parabole avrà le seguenti coordinate:

$P(1;\ -5)$

Calcoliamo ora l'equazione della retta tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - 6x$

$y = x^2 - 6x$ tangente nel punto ***P(1; -5)*** applicando la formula seguente:

$$\frac{y + y_0}{2} = a \cdot x_0 \cdot x + 4\frac{x + x_0}{2} + c$$

$$Dove: \begin{cases} a = 1; b = -6; c = 0 \\ x_0 = 1;\ \ y_0 = -5 \end{cases}$$

$$\frac{y - 5}{2} = 1 \cdot 1 \cdot x - 6\frac{x + 1}{2} + 0$$

$$\frac{y - 5}{2} = x - 3x - 3$$

$$\frac{y - 5}{2} = -2x - 3$$

Moltiplico ambo i membri per ***2***

$y - 5 = -4x - 6$

$y = -4x - 1$ retta ***t***

Mentre le altre rette che ci interessano per disegnare il nostro triangolo sono:

$y = -5$ retta ***r***

$y = -4x - 1$ retta ***t***

Consideriamo la retta t:

$y = -4x - 1$ per ***x* = *0*** avremo $y = -1$ ➔ A(0; –1)

$y = -4x - 1$ per ***x* = *–5*** avremo

$-4x - 1 = -5$

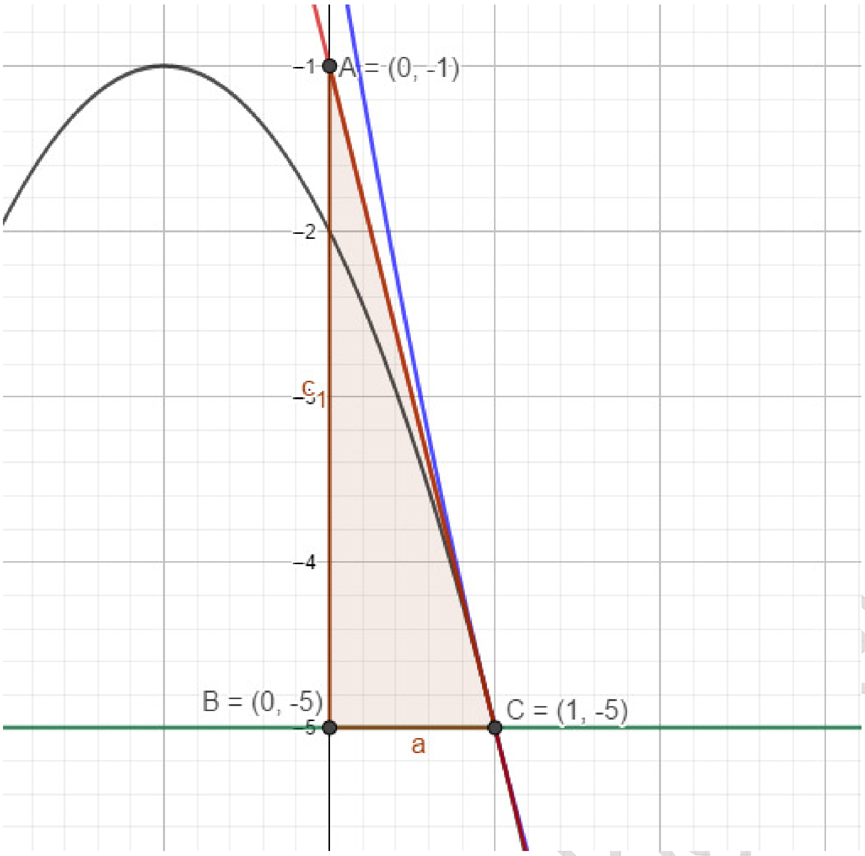
$-4x = -4$

$x = 1$

C (1; –5)

http://skuolablog.altervista.org

Disegniamo il grafico:



Dall'intersezione delle rette t, r e asse y abbiamo ottenuto un triangolo rettangolo i cui cateti hanno le seguenti dimensioni:

Cateto maggiore = ***AB = 4***;

cateto minore = ***AC = 1.***

$$Area = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$$